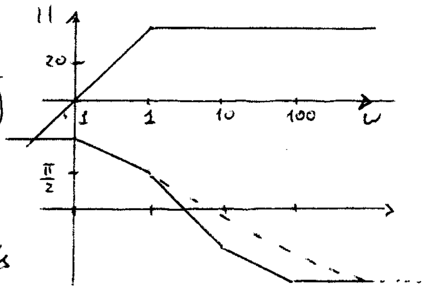
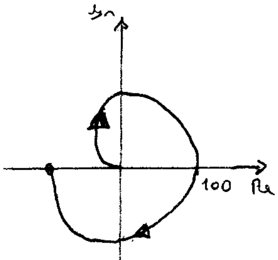
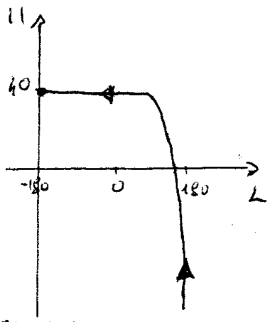
1) $G(s)=\dfrac{100\, s^2\left(1-\frac{s}{10}\right)}{(1+0.3s+s^2)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$



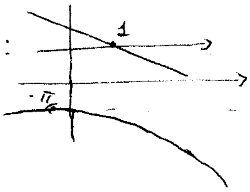

PASSA-ALTO

Banda ~ [1 ÷ ∞] rad/s

PER LA TRACCIA B, CAMBIA SOLO LA FASE SU BODE (TRATTEGGIATA)

2) Le 2 specifiche di regime sono soddisfatte con $C(s)=\frac{K_c}{s}$, con $K_c$ libero.

Si scelga $K_c=1$ e si tracci Bode di $F(s)=\frac{e^{-2s}}{s}$:




$\omega_c=1$

$\angle F(j1) = -\frac{\pi}{2}-2=-3.57$ rad $(-205°)$

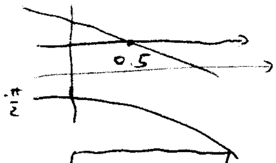
Sistema a ciclo chiuso non asintoticamente stabile.

Possiamo abbassare il guadagno $K_c$ (la fase non cambia).

Qual è la pulsazione $\omega_\pi$? $\angle F(j\omega_\pi)=-\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2}-2\omega_\pi=-\pi \Rightarrow \omega_\pi=0.78$

Il modulo di F a $\omega_\pi$ vale $\frac{1}{0.78}$ $\Rightarrow$ devo avere $K_c<0.78$, ad esempio $K_c=0.5$ per la stabilità

Quindi $\boxed{C(s)=\frac{0.5}{s}}$. Dal nuovo Bode per $F(s)=\frac{0.5\,e^{-2s}}{s}$




$\omega_c=0.5$ $\quad \angle F(j0.5) = -\frac{\pi}{2}-1=-2.57$ $(-147°)$ $\Rightarrow \boxed{m_\varphi=33°}$

PER LA TRACCIA B, IL RAGIONAMENTO È LO STESSO

$F=\frac{e^{-3s}}{s}$ $\qquad \omega_c=1$

$\angle F(j1) = -\frac{\pi}{2}-3=-4.57$ $(-261°)$

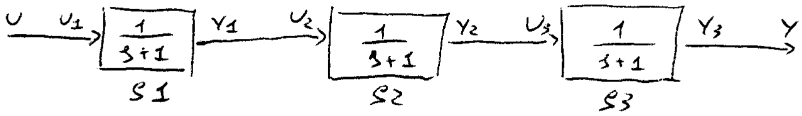
$\angle F(j\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2}-3\,\omega_\pi = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 0.52$

$|F(j0.52)| = \frac{1}{0.52} \Rightarrow K_c < 0.52$ ad esempio $K_c=0.4$

$C(s)=\frac{0.4}{s}$, $\quad F=\frac{0.4\,e^{-3s}}{s}$

$\omega_c=0.4$ $\quad \angle F(j0.4) = -\frac{\pi}{2}-1.2=-2.77$ $(-159°)$

$m_\varphi=21°$

3) 


$S1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$ $S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

$S3: \begin{cases} \dot{x}_3 = -x_3 + u_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ $u_1 = u$, $u_2 = y_1$, $u_3 = y_2$, $y = y_3$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Per $t<0$ $\quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad G(0) = 1 \quad |G(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \angle G(j1) = -\frac{3}{4}\pi$

$$y(t) = G(0)\cdot 2 + |G(j1)| \sin(t + \angle G(j1)) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

Ci serve anche conoscere $x_2(t)$ e $x_3(t)$ perché da $t=0$ evoluzione libera di $S2$ e $S_3$

Si noti che, visto che $y_2 = x_2$ e $y_3 = x_3$, si può dedurre subito che $G_{x_2}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ $\quad G_{x_3}(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$. Oppure:

$$G_x(s) = (sI - A)^{-1} b = \begin{pmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} (s+1)^2 & s+1 & 1 \\ 0 & (s+1)^2 & s+1 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s+1)^3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^3} \end{pmatrix}$$

$$G_x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad G_x(j1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{3}{4}\pi} \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = 2 + \frac{1}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x_3(t) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

Per $t=0$ $\quad x_2(0) = \frac{3}{2} \quad x_3(0) = \frac{5}{4}$

Per $t>0$ ev. libera di $S2$ e $S_3$, cioè di $\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1} x(0) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5/4 \end{pmatrix}}{(s+1)^2} = \frac{\frac{5}{4}s + \frac{11}{4}}{(s+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{5}{4}}{s+1}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} t e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-t}$$

per la traccia B ragionamento analogo ma numeri diversi a causa del diverso ingresso

L'apertura dell'altro interruttore non produce alcun effetto perché il sistema $S_3$ si è già "scaricato". $x_3(9) = y(9) \simeq \emptyset$

4) INSTABILE $\quad G(z) = z\left(\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right)$

$$y_g(k) = \left[2(-1)^k - (-2)^k\right] 1(k)$$

TRACCIA B $\quad G(z) = z\left(\frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+3}\right)$

$$y_g(k) = \left[2(-2)^k - (-3)^k\right] 1(k)$$